

МАРКОВИЦ МОДЕЛІ: МАТЕМАТИКАЛЫҚ АСПЕКТІЛЕР ЖӘНЕ КОМПЬЮТЕРЛІК ІСКЕ АСЫРУ

Куандыкова Эланура Махсатовна

kuandykova_em@enu.kz

«Ақпараттық жүйелер» білім бағдарламасының 3 курс студенті

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия Ұлттық университеті, Астана қ, Қазақстан Республикасы

Ғылыми жетекшісі, PhD, аға оқытушы – **Ламашева Ж.Б.**

АННОТАЦИЯ. Мақалада марковиц моделін зерттеуге қатысты мәселелер қарастырылады. Модельді компьютерлік іске асыру үшін Excel электрондық кестелерді пайдалану ұсынылады. Практикалық есептеулердің мысалы келтірілген.

Кілттік сөздер. Инвестициялық талдау, портфельдік теория, марковиц моделі, электронды Excel кестелері.

Экономикалық университеттің әртүрлі курстарында инвестициялық элементтер қарастырылады талдау. Атап айтқанда, келесі міндет: оңтайлы инвестициялық портфельді құру, берілген активтерден (мысалы, акциялардан) жасалған. Берілген шешімнің теориялық негіздері Марковицтің 1950 жылдары тұжырымдалған портфолио теориясында жатыр [1], ол үлестерді оңтайлы таңдаумен инвестициялық портфельді қалыптастыру әдістемесін ұсынады берілген активтер. Инвестордың көзқарасы бойынша оңтайлы портфолио мыналарды қамтамасыз етуі керек ең төменгі тәуекелмен мүмкін болатын ең жоғары кірістілік. Алайда, математикалық тұрғыдан тапсырманы қою қайшылықты және шешімі жоқ. Сондықтан, әдетте, бұл тапсырманың екі мүмкін нұсқасының бірі қарастырылады:

– берілген кезде максималды кірісті қамтамасыз ететін активтердің үлесін есептеу тәуекел деңгейі;

– берілген деңгейде минималды тәуекелді қамтамасыз ететін активтердің үлестерін есептеу кірістілік.

[2] жұмыста еліміздің экономикалық өсуіне ықпал ететін әлеуметтік маңызы бар жобаларды қаржыландырудың мемлекеттік саясатын жүзеге асыратын даму банкінің инвестициялық портфельін қалыптастыру және оңтайландыру мәселелері қарастырылған. Бұл модель банктің мақсаттары мен тәуекелдік қатынасын ескереді. Олар Марковиц теориясына негізделген оңтайлы портфолионы қалыптастыру әдістемесін ұсынған. Ұсынылып отырған әдістеменің маңызды ерекшелігі даму банкі мен коммерциялық банктердің басымдықтарындағы айырмашылықтарды ескереді. Марковиц портфолио теориясы [3] талданады. Бұл модельдің ерекше белгілері мен мәні қарастырылады. Бұл модель нақты мысал арқылы талданады. Механикалық сауда жүйелері мен портфельді инвестициялау негізінде Г. Марковиц теориясы мен тұжырымдамаларын біріктіруге негізделген модель [4] мақалада талқыланады.

Бұл мақалада осы есептің математикалық аспектілері қарастырылады және оның шешімін Excel электрондық кестелерінде компьютерлік іске асыру.

Марковиц моделінің математикалық аспектілері.

Марковиц моделі қаржы теориясында инвестициялық портфельді портфельдегі әрбір активтің кірістерінен тұратын кездейсоқ вектор ретінде қарастырады. Бұл әр активтің кірістілігі кездейсоқ шама деп болжайды.

Марковиц моделінің негізгі алғышарттарына экономика арасындағы ауысудың тұрақты ықтималдығы бар күйлердің соңғы санының бірінде болатын Экономика күйлерінің стационарлығы, сондай-ақ уақыттың бастапқы сәтінде қалыптасатын және оның кірістілігін бағалау сәтіне дейін өзгеріссіз қалатын портфельдің статикалық сипаты жатады.

Марковиц моделінің математикалық аспектілері келесі қадамдарды қамтиды:

1) Портфолио кірістілігін математикалық күту $E(R_p)$;

Портфельдің күтілетін кірісі портфельдегі әрбір активтің күтілетін кірістерінің сараланған сомасы ретінде есептеледі.

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^n w_i \times E(R_i)$$

2) Портфолио кірістілігінің дисперсиясы σ_p^2 ;

Портфельдің кірістілігінің дисперсиясы портфельдің тәуекелін сипаттайды және оның кірістілігінің өзгергіштік дәрежесін өлшейді.

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i \times w_j \times \sigma_{ij}$$

3) Портфельді оңтайландыру:

Портфельді оңтайландыру берілген кірістілік деңгейі үшін тәуекелді азайту немесе тәуекелдің берілген деңгейі үшін табыстылықты арттыру сияқты белгіленген критерийлерді ескере отырып, портфельдегі активтердің оңтайлы комбинациясына қол жеткізуге бағытталған. Марковиц моделі портфельді оңтайландыру үшін жиі пайдаланылады, бұл олардың күтілетін кірістерін, ауытқуларын және ковариацияларын ескере отырып, активтердің ең тиімді комбинациясын табуға көмектеседі. Портфельді оңтайландыру процесі тиімді фронтты қалыптастыруды және қойылған мақсаттар мен шектеулерге сәйкес осы фронт бойынша оңтайлы портфельді таңдауды қамтиды.

4) Лагранж әдісі:

Оңтайландыру мәселесін шешу үшін Лагранж әдісі қолданылады. Лагранж функциясы есептің шектеулерін ескере отырып құрылады, содан кейін осы функцияның ішінара туындылары барлық айнымалылар бойынша болады. Бұл портфолиодағы активтер үлесінің оңтайлы мәндерін алу үшін шешілетін теңдеулер жүйесіне әкеледі.

5) Теңдеулер жүйесін шешу:

Алынған теңдеулер жүйесін кері матрица әдісін қолдана отырып шешуге болады, мұнда A-жүйе коэффициенттерінің матрицасы, b-еркін мүшелердің векторы. Жүйенің шешімі портфельдегі активтер үлесінің оңтайлы мәндерін береді.

Осылайша, марковиц моделі күтілетін кірістілік пен әртүрлі активтерге инвестициялауға байланысты тәуекелді ескере отырып, портфельді оңтайландыруға мүмкіндік береді.

Марковиц моделін компьютерлік іске асыру

Марковиц моделін компьютерлік іске асыру электронды түрде ыңғайлы Excel кестелері (басқа өндірушілердің электрондық кестелерін де қолдануға болады бағдарламалық жасақтама, мысалы, Ashampoo Office бағдарламасындағы PlanMaker).

Оңтайлы портфельді қалыптастыру міндеті екі өлшемге ие: тәуекел және кірістілік. Тәуекелдерді барынша азайтатын, кірісті барынша арттыратын шешім алу мүмкін емес. Сондықтан, бұл мәселені шешу кезінде инвестордың пікірі ескеріледі, ол мыналарды қарастырады белгілі бір кірістілік деңгейінде тәуекелді азайту немесе белгілі бір тәуекел деңгейінде кірісті максимизациялау.

1. Бастапқы ақпаратты енгізу. ҚР компанияларының 01-04-2023 пен 31-12-2023 уақыт аралығындағы акцияларының динамикасы (1-сурет).

Дата	Стоимость акций компаний (тг.):					
	Halyk bank	Kaspi bank	Fortebank	Bank Tsent	Kcell	KazTransOil
03.04.2023	137,92	74,5	3,98	680	1789,99	654,05
04.04.2023	138,09	75,2	3,97	679,71	1786,36	647,79
05.04.2023	140,48	74	4,1	665,05	1789,98	659,8
06.04.2023	143	72	4,27	683,92	1819	665
07.04.2023	144	72	4,19	675,19	1820	672
10.04.2023	145,63	72,7	4,5	683,9	1844,75	681,2
11.04.2023	144	72,3	4,57	682	1849,99	680
12.04.2023	145,58	71,2	4,51	680	1842,09	676,89
13.04.2023	145	73,4	4,48	683,88	1865,95	674,89
14.04.2023	144,47	72,2	4,41	683,9	1887,86	680
17.04.2023	145,96	74,5	4,36	680	1887,61	682,99
18.04.2023	144	74,5	4,39	631,02	1884,65	700,01
19.04.2023	144,97	74,5	4,35	683,89	1881,49	720
20.04.2023	145,6	77	4,34	683,9	1883	730
21.04.2023	144	78,4	4,39	695	1884	743
24.04.2023	157	79	4,37	685	1887	739
25.04.2023	157,7	78,4	4,4	680	1881,16	760
26.04.2023	153	79,3	4,49	689	1880	750,01
27.04.2023	154	79,3	4,49	695	1893,49	752
28.04.2023	156	82,5	4,58	685	1872,11	754,99
02.05.2023	157,3	79,3	4,59	693,48	1879,97	773,99
03.05.2023	156	79,5	4,58	680	1855,54	750,12
04.05.2023	156,47	80,7	4,3	684,84	1900	762,49
05.05.2023	159,6	84	4,34	684,9	1921	759,8
10.05.2023	158,7	82,5	4,34	684,95	1917,7	759
11.05.2023	158,9	83,6	4,2	676	1899,99	750
12.05.2023	159	83,4	4,2	683,76	1900	750
15.05.2023	158,3	84	4,27	682,68	1919	740
16.05.2023	158,9	83,8	4,27	682,99	1879	744,36
17.05.2023	160,2	82	4,2	679	1890	744,99

Сурет 1. Бастапқы ақпарат.

2. Әр компания акцияларының бір күндік және орташа кірістілігін есептеу (2-сурет).

Кесте 1 - Кіріс.

Доходность	Доходность	Доходность	Доходность	Доходность	Доходность
0,123259861	0,939597315	-0,251256281	-0,042647059	-0,202794429	-0,957113371
1,730755305	-1,595744681	3,274559194	-2,156802166	0,202646723	1,853995894
1,793849658	-2,702702703	4,146341463	2,837380648	1,621247165	0,788117611
0,699300699	0	-1,8735363	-1,276465084	0,054975261	1,052631579
1,131944444	0,972222222	7,398568019	1,290007257	1,35989011	1,369047619
-1,119274875	-0,550206327	1,555555556	-0,277818395	0,284049329	-0,176159718
1,097222222	-1,521438451	-1,312910284	-0,293255132	-0,427029335	-0,457352941
-0,398406375	3,08988764	-0,66518847	0,570588235	1,295267875	-0,295468983
-0,365517241	-1,634877384	-1,5625	0,00292449	1,174200809	0,757160426
1,031355991	3,185595568	-1,133786848	-0,57025881	-0,013242507	0,439705882
-1,342833653	0	0,688073394	-7,202941176	-0,156812053	2,491983777
0,673611111	0	-0,911161731	8,378498304	-0,16767039	2,85567349
0,43457267	3,355704698	-0,229885057	0,001462223	0,080255542	1,388888889
-1,098901099	1,818181818	1,152073733	1,623044305	0,053106745	1,780821918
9,027777778	0,765306122	-0,455580866	-1,438848921	0,159235669	-0,538358008
0,445859873	-0,759493671	0,686498856	-0,729927007	-0,309485957	2,841677943
-2,980342422	1,147959184	2,045454545	1,323529412	-0,06166408	-1,314473684
0,653594771	0	0	0,870827286	0,717553191	0,265329796
1,298701299	4,035308953	2,004454343	-1,438848921	-1,12913192	0,397606383
0,833333333	-3,878787879	0,218340611	1,237956204	0,419847124	2,516589624
-0,826446281	0,25220681	-0,217864924	-1,943819577	-1,299488822	-3,084019173
0,301282051	1,509433962	-6,113537118	0,711764706	2,396067991	1,649069482
2,00038346	4,089219331	0,930232558	0,00876117	1,105263158	-0,352791512
-0,563909774	-1,785714286	0	0,007300336	-0,171785528	-0,105290866

Кесте 2 - Орташа мән.

0,676923077	-1,604278075	0,531914894	0,159917991	0,20399795	1,993892158
		СРЕД.ЗНАЧ			
0,102022028	0,135590137	-0,013828128	0,216229481	2,101641425	535,5476573

Ескерту:

	Ұяшық мазмұны(Halyk bank)	Ұяшық мазмұны(KazTransO il)
4	=(B4/B3-1)*100	=(G4/G3-1)*100
5	=(B5/B4-1)*100	=(G5/G4-1)*100
6	=(B6/B5-1)*100	=(G6/G5-1)*100
7	=(B7/B6-1)*100	=(G7/G6-1)*100
....
....
....
....
187	=(G187/G186-1)*100	=(G187/G186-1)*100
188	=(B188/B187-1)*100	=(G187/G186-1)*100
190		Орташа мән	
191	=СРЗНАЧ(J4:J188)		=СРЗНАЧ(O4:O188)

Сурет 2. Бір күндік кірістіліктің орташа мәннен ауытқуын есептеу .

Кесте 3 - Орташа мәннен ауытқу

Отклонение дохо,	Отклонение дохо,	Отклонение дохо,	Отклонение дохо,	Отклонение дохо,	Отклонение дохо,
0,021237833	0,804007179	-0,237428154	-0,25887654	-2,304435854	-536,5047707
1,628733277	-1,731334818	3,288387322	-2,373031647	-1,898994702	-533,6936614
1,691827631	-2,83829284	4,160169591	2,621151167	-0,480394261	-534,7595397
0,597278672	-0,135590137	-1,859708172	-1,492694565	-2,046666164	-534,4950258
1,029922417	0,836632085	7,412396147	1,073777776	-0,741751315	-534,1786097
-1,221296902	-0,685796464	1,569383683	-0,494047875	-1,817592096	-535,723817
0,995200195	-1,657028588	-1,299082157	-0,509484613	-2,528670761	-536,0050103
-0,500428402	2,954297504	-0,651360342	0,354358754	-0,80637355	-535,8431263
-0,467539269	-1,770467521	-1,548671872	-0,213304991	-0,927440616	-534,7904969
0,929333963	3,050005431	-1,11995872	-0,786488291	-2,114883933	-535,1079514
-1,444855681	-0,135590137	0,701901522	-7,419170657	-2,258453479	-533,0556736
0,571589083	-0,135590137	-0,897333603	8,162268823	-2,269311815	-532,6919838
0,332550643	3,220114561	-0,21605693	-0,214767258	-2,021385883	-534,1587684
-1,200923127	1,682591681	1,165901861	1,406814824	-2,048534681	-533,7668354
8,92575575	0,629715986	-0,441752738	-1,655078402	-1,942405757	-536,0860153
0,343837845	-0,895083808	0,700326984	-0,946156488	-2,411127382	-532,7059794
-3,08236445	1,012369047	2,059282673	1,107299931	-2,163305505	-536,862131
0,551572744	-0,135590137	0,013828128	0,654597805	-1,384088234	-535,2823275
1,196679271	3,899718817	2,018282471	-1,655078402	-3,230773346	-535,1500509
0,731311306	-4,014378016	0,232168739	1,021726723	-1,681794301	-533,0310677
-0,928468309	0,116616673	-0,204036796	-2,160049058	-3,401130247	-538,6316765
0,199260024	1,373843825	-6,09970899	0,495535225	0,294426566	-533,8985878
1,898361432	3,953629194	0,944060686	-0,20746831	-0,996378267	-535,9004488
-0,665931802	-1,921304423	0,013828128	-0,208929145	-2,273426954	-535,6529482
0,024001917	1,197743197	-3,211978324	-1,522894201	-3,025143537	-536,7334281
-0,039089366	-0,374824587	0,013828128	0,931699513	-2,101115107	-535,5476573
-0,5422736	0,583834324	1,680494795	-0,374179639	-1,101641425	-536,8809907

Ескерту:

	Ұяшық мазмұны(Halyk bank)	Ұяшық мазмұны(KazTransOil)
4	=J4-J\$191	=O4-O\$191
5	=J5-J\$191	=O5-O\$191
6	=J6-J\$191	=O6-O\$191
7	=J7-J\$191	=O7-O\$191
....
....
....
....
187	=J187-J\$191	=J187-J\$191
188	=J188-J\$191	=J188-J\$191

Сурет 3.. Ковариациялық матрицаны табу Σ .

Ол үшін бос ұяшықтарды таңдау керек (Z4: AE9), содан кейін формуланы енгізіңіз
 $=\text{МУМНОЖ}(\text{ТРАНСП}(R4:W188); R4:W188)/(192-1)$

Ctrl+Shift+Enter пернелерін бір уақытта басу арқылы, нәтижесінде ковариациялық матрица пайда болады.

Кесте 4 - Ковариациялық матрица

Ковариационная матрица					
1,861928213	-0,05211194	0,035878231	0,078727279	0,318663026	282,4561684
-0,05211194	4,181848606	-0,085717271	-0,207418864	2,81254842	156,7866862
0,035878231	-0,085717271	2,745024175	-0,070332742	1,480626844	-130,926411
0,078727279	-0,207418864	-0,070332742	3,828985128	0,100126253	-36,38855427
0,318663026	2,81254842	1,480626844	0,100126253	1148,99272	-808,5944147
282,4561684	156,7866862	-130,926411	-36,38855427	-808,5944147	51171281,87

5. Ковариацияға кері матрицаны табу Σ^{-1} .

Ол үшін бос ұяшықтарды таңдау керек (Z12: AE17), содан кейін енгізу керек формула
 $=\text{МОБР}(Z4: AE9)$

Ctrl+Shift+Enter пернелерін бір уақытта басу арқылы, нәтижесінде ковариацияға кері матрица пайда болады.

Кесте 5 - Ковариацияға кері матрица

Матрица, обратная к ковариационной					
0,538335765	0,006239734	-0,007179893	-0,010887127	-0,0001565	-3,01922E-06
0,006239734	0,240452197	0,008050458	0,013053664	-0,000602359	-7,50816E-07
-0,007179893	0,008050458	0,365136595	0,007312502	-0,000488212	9,46686E-07
-0,010887127	0,013053664	0,007312502	0,262234833	-6,10509E-05	2,24323E-07
-0,0001565	-0,000602359	-0,000488212	-6,10509E-05	0,000872491	1,52038E-08
-3,01922E-06	-7,50816E-07	9,46686E-07	2,24323E-07	1,52038E-08	1,9564E-08

6. A, B, C, AC-B², λ , δ шамаларын есептеу

Ол үшін кірістіліктің орташа мәндерін ауыстыру қажет, формуланы енгізу арқылы бос ұяшықтарды таңдау (Z19:Z24)

$=\text{ТРАНСП}(J191: O191)$

Ctrl+Shift+Enter пернелерін бір уақытта басылады.

Әрі қарай, ұяшықтарға (Z26:Z31) және (J192:O192) векторларын енгізу керек бірліктер. Есептеулердің нәтижелері 7-суретте көрсетілген.

Кесте 6 - Шамалардың мәндері

A	B	C	μ
0,031419164	0,141222947	1,437589162	0,3
AC-B ²	λ	δ	
0,025223929	11,49915216	-0,43402119	

7. Оңтайлы портфолио құрылымын есептеу нәтижесін 8-суреттен көруге болады.

Кесте 7 - Оңтайлы портфолио

Структура оптимального портфеля (доходность)			
λ m	δ i	λ m + δ i	w*
1,173166819	-0,43402119	0,739145629	0,364535651
1,559171614	-0,43402119	1,125150424	0,364535651
-0,159011747	-0,43402119	-0,593032937	0,364535651
2,486455702	-0,43402119	2,052434512	0,364535651
24,16709453	-0,43402119	23,73307334	0,364535651
6158,343998	-0,43402119	6157,909977	0,364535651

8. Тәуекел мөлшерін есептеу.

Мұны істеу үшін алдымен ұяшықтарды таңдау керек (A34: AF34), енгізу формула:
=МУМНОЖ(ТРАНСП(АЕ26: АЕ31); Z4: АЕ9)

Ctrl+Shift+Enter пернелерін бір уақытта басу керек. Нәтижесінде вектор пайда болады.

вектор					
w					
103,7830275	59,57818849	-46,23075088	-11,90517559	125,8049968	18653560,89
Расчет величины риска					
2,7712	2607,675626				

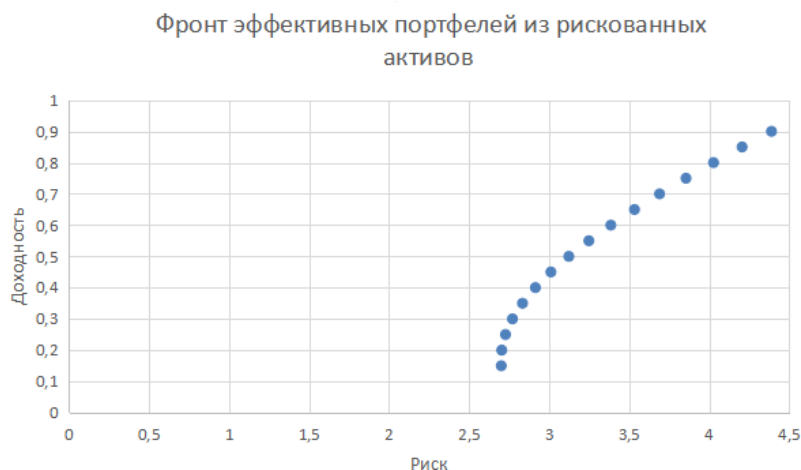
Сурет 4. Тәуекел мөлшері.

9. Тиімді портфолио фронтын құру үшін берілген кірістілік деңгейіндегі тәуекелді активтерден дайындау. Мәндерді өзгерту кірістілік және осылайша тәуекелдің әртүрлі мәндерін алу арқылы біз қалыптастырамыз тиімді портфельдердің алдыңғы жағын құруға арналған мәліметтер.

Данные для построения фронта эффективных портфелей		
№ п.п.	Риск	Доходность
1	2,7011	0,15
2	2,7041	0,2
3	2,7276	0,25
4	2,7712	0,3
5	2,8338	0,35
6	2,9144	0,4
7	3,0113	0,45
8	3,1232	0,5
9	3,2485	0,55
10	3,3856	0,6
11	3,5333	0,65
12	3,6902	0,7
13	3,8552	0,75
14	4,0273	0,8
15	4,2057	0,85
16	4,3895	0,9

Сурет 5. Тиімді портфолио деректері.

Марковицтің тиімді шекарасы 11-Суретте бейнеленген, барлық тиімді портфельдер жоғарғы сызықта орналасқан. Тиімді шекара - бұл белгілі бір тәуекел деңгейі үшін ең жақсы болжамды кірісті немесе белгілі бір кірістілік деңгейі үшін ең төменгі тәуекелді қамтамасыз ететін оңтайлы портфельдер жиынтығы. Тиімді шекарадан төмен түсетін портфельдер тиімсіз, өйткені олар тәуекел деңгейіне қатысты кірістіліктің жеткілікті мөлшерін тудырмайды.



Сурет 6. Тәуекел шекарасы.

Қорытынды. Марковиц моделі математикалық әдістерді қолдана отырып, әсіресе университеттердегі қаржы-экономикалық курстарда экономикалық мәселелерді талдаудың құнды құралы ретінде қызмет етеді. Осы модельді практикалық қолдану арқылы студенттер жоғары математиканың әртүрлі элементтері, соның ішінде матрицалық есептеулер, сандық әдістер және сандық шешімдердегі тұрақтылық ұғымдары туралы түсінік алады.

Марковиц моделін практикалық іске асыруда қолданған кезде теңдеулер жүйесіндегі матрицасының шарттылығын, әсіресе оның детерминантын есептеу арқылы зерттеу қажет. Бұл талдау шешімнің тұрақтылығы мен сенімділігін қамтамасыз ету үшін өте маңызды.

Оңтайландыру мәселесі үшін берілген бастапқы деректер, әсіресе портфельдің күтілетін кірістілігі нақты талаптарға сай болуы керек. Күтілетін кірістің алдын ала белгіленген шектерде болуын қамтамасыз ету маңызды. Әйтпесе, шешім портфельдегі бағалы қағаздар акцияларының теріс мәндері сияқты практикалық емес нәтижелерге әкелуі мүмкін.

Осы ойларды ескере отырып, студенттер мен практиктер марковиц моделін нақты контексте түсіну мен қолдануды жақсарта алады. Бұл тәсіл қаржылық модельдеу принциптерін тереңірек түсінуге ықпал етеді және негізделген инвестициялық шешімдер қабылдауға көмектеседі.

Қолданылған әдебиеттер тізімі:

1. Markowitz H. Portfolio selection // The Journal of Finance. 1952. №7. P. 77-91
2. Shukayev D., Vimurat Zh., Shukayev M., Simons A. Optimal portfolio selection for a development bank // Вестник КазНУ. Серия Экономическая. 2018. Том 126, №4, С. 104-116
3. Кривоногова Л.В., Сиднева А.С. Портфельная теория марковица // Форум молодых ученых. 2018, №12-2 (28). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/portfel'naya-teoriya-markovitsa> (дата обращения: 03.04.2024)
4. Пасеков П.Ю. Применение теории Марковица к портфелю

механических торговых систем // Математика. Механика. 2011, №13. URL:
<https://cyberleninka.ru/article/n/primeneniye-teorii-markovitsa-k-portfelyu-mehanicheskikh-torgovyh-sistem> (дата обращения: 03.04.2024)